Avances recientes sobre la distribución de los números primos

Enrique Treviño

Coloquio Universidad Estatal a Distancia, 24 de marzo 2021

1857
LAKE FOREST COLLEGE

Introducción

Considera la secuencia

11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

- ¿Cuántos números pares tiene?
- Tiene 5.
- ¿Cuántos cuadrados perfectos tiene?
- Tiene 1.
- ¿Cuántos números primos tiene?
- Tiene 4.

Introducción

Considera la secuencia

11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

- ¿Cuántos números pares tiene?
- Tiene 5.
- ¿Cuántos cuadrados perfectos tiene?
- Tiene 1.
- ¿Cuántos números primos tiene?
- Tiene 4.

Introducción

Considera la secuencia

11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

- ¿Cuántos números pares tiene?
- Tiene 5.
- ¿Cuántos cuadrados perfectos tiene?
- Tiene 1.
- ¿Cuántos números primos tiene?
- Tiene 4.

Introducción

Considera la secuencia

11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

- ¿Cuántos números pares tiene?
- Tiene 5.
- ¿Cuántos cuadrados perfectos tiene?
- Tiene 1.
- ¿Cuántos números primos tiene?
- Tiene 4.

Considera los enteros de 1001 a 2000:

- ¿Cuántos números pares tiene?
- 500.
- ¿Cuántos cuadrados perfectos tiene?
- 13.
- ¿Cuántos números primos tiene?
- 135.

Considera los enteros de 1001 a 2000:

- ¿Cuántos números pares tiene?
- 500.
- ¿Cuántos cuadrados perfectos tiene?
- 13.
- ¿Cuántos números primos tiene?
- 135.

Considera los enteros de 1001 a 2000:

- ¿Cuántos números pares tiene?
- 500.
- ¿Cuántos cuadrados perfectos tiene?
- 13.
- ¿Cuántos números primos tiene?
- 135.

Considera los enteros de 1001 a 2000:

- ¿Cuántos números pares tiene?
- 500.
- ¿Cuántos cuadrados perfectos tiene?
- 13.
- ¿Cuántos números primos tiene?
- 135.

Considera los enteros de 1000001 al 2000000:

- ¿Cuántos números pares tiene?
- 500000.
- ¿Cuántos cuadrados perfectos tiene?
- 414.
- ¿Cuántos números primos tiene?
- 70435.

Considera los enteros de 1000001 al 2000000:

- ¿Cuántos números pares tiene?
- 500000.
- ¿Cuántos cuadrados perfectos tiene?
- 414.
- ¿Cuántos números primos tiene?
- 70435.

Considera los enteros de 1000001 al 2000000:

- ¿Cuántos números pares tiene?
- 500000.
- ¿Cuántos cuadrados perfectos tiene?
- 414.
- ¿Cuántos números primos tiene?
- 70435.

Considera los enteros de 1000001 al 2000000:

- ¿Cuántos números pares tiene?
- 500000.
- ¿Cuántos cuadrados perfectos tiene?
- 414.
- ¿Cuántos números primos tiene?
- 70435.

Introducción

Considera

11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos pares consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos pares consecutivos?
- 2.
- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos cuadrados perfectos consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos cuadrados perfectos consecutivos?
- No hay dos cuadrados consecutivos en esta lista.
- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos primos consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos primos consecutivos?
- La más grande es 4 y la más chica es 2.

Introducción

Considera

11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos pares consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos pares consecutivos?
- 2.
- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos cuadrados perfectos consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos cuadrados perfectos consecutivos?
- No hay dos cuadrados consecutivos en esta lista.
- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos primos consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos primos consecutivos?
- La más grande es 4 y la más chica es 2.

Introducción

Considera

11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos pares consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos pares consecutivos?
- 2.
- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos cuadrados perfectos consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos cuadrados perfectos consecutivos?
- No hay dos cuadrados consecutivos en esta lista.
- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos primos consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos primos consecutivos?
- La más grande es 4 y la más chica es 2.

Introducción

Considera

11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos pares consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos pares consecutivos?
- 2.
- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos cuadrados perfectos consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos cuadrados perfectos consecutivos?
- No hay dos cuadrados consecutivos en esta lista.
- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos primos consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos primos consecutivos?
- La más grande es 4 y la más chica es 2.

Considera los números enteros de 1001 a 2000:

- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos pares consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos pares consecutivos?
- 2.
- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos cuadrados perfectos consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos cuadrados perfectos consecutivos?
- 87 y 65, respectivamente.
- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos primos consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos primos consecutivos?
- 34 y 2, respectivamente.

Considera los números enteros de 1001 a 2000:

- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos pares consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos pares consecutivos?
- 2.
- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos cuadrados perfectos consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos cuadrados perfectos consecutivos?
- 87 y 65, respectivamente.
- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos primos consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos primos consecutivos?
- 34 y 2, respectivamente.

Considera los números enteros de 1001 a 2000:

- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos pares consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos pares consecutivos?
- 2.
- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos cuadrados perfectos consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos cuadrados perfectos consecutivos?
- 87 y 65, respectivamente.
- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos primos consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos primos consecutivos?
- 34 y 2, respectivamente.

Considera los números enteros de 1001 a 2000:

- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos pares consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos pares consecutivos?
- 2.
- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos cuadrados perfectos consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos cuadrados perfectos consecutivos?
- 87 y 65, respectivamente.
- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos primos consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos primos consecutivos?
- 34 y 2, respectivamente.

Considera los números enteros de 1000001 a 2000000:

- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos pares consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos pares consecutivos?
- 2.
- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos cuadrados perfectos consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos cuadrados perfectos consecutivos?
- 2827 y 2001, respectivamente.
- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos primos consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos primos consecutivos?
- 132 y 2, respectivamente.

Considera los números enteros de 1000001 a 2000000:

- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos pares consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos pares consecutivos?
- 2.
- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos cuadrados perfectos consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos cuadrados perfectos consecutivos?
- 2827 y 2001, respectivamente.
- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos primos consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos primos consecutivos?
- 132 y 2, respectivamente.

Considera los números enteros de 1000001 a 2000000:

- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos pares consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos pares consecutivos?
- 2.
- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos cuadrados perfectos consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos cuadrados perfectos consecutivos?
- 2827 y 2001, respectivamente.
- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos primos consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos primos consecutivos?
- 132 y 2, respectivamente.

Considera los números enteros de 1000001 a 2000000:

- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos pares consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos pares consecutivos?
- 2.
- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos cuadrados perfectos consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos cuadrados perfectos consecutivos?
- 2827 y 2001, respectivamente.
- ¿Cuál es la distancia más grande entre dos primos consecutivos? ¿Cuál es la distancia más chica entre dos primos consecutivos?
- 132 y 2, respectivamente.

Intervalo	# Pares	# Cuadrados	# Primos
11-20	5	1	4
1001-2000	500	13	135
1000001-2000000	500000	414	70435

	Pares		Cuadrados			Primos		
R	#	Dif	#	Dif chica	Dif Grande	#	Dif C	Dif G
10	5	2	1	NA	NA	4	2	4
10^3	500	2	13	65	87	135	2	34
10^6	$5 \cdot 10^5$	2	414	2001	2827	70435	2	132
x	$\frac{x}{2}$	2	$(\sqrt{2}-1)\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}$	$2\sqrt{2x}$	$\frac{x}{\log x}$	2	$(\log x)^2$

Diferencias de Primos consecutivos

Intervalo	#	Dif Chica	Dif Promedio	Dif Grande
10	4	2	2	4
1000	135	2	7.33	34
1000000	70435	2	14.20	132
x	$\frac{x}{\log x}$	2	$\log x$	$(\log x)^2$

Teorema de los números Primos

Teorema

Para un $x > 0$ *real. Sea* $\pi(x)$ *el número de primos en el intervalo* $[1, x]$
Entonces

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Notas:

- $f(x) \sim g(x)$ significa que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

- En teoría de números acostumbramos usar $\log$ en la base natural. Es decir $\log(e) = 1$.

Conjecturas sobre primos gemelos

Conjectura (Primos gemelos)

Existen infinitos primos p tal que $p + 2$ también es primo.

Reforcemos la conjectura un poco para ponerla en términos de una variable x:

Conjectura

Sea x un entero muy grande. Entonces, existe un primo p entre $x + 1$ y $2x$ tal que $p + 2$ también es primo.

Teorema

Para x un entero grande, existen dos primos p y q entre $x + 1$ y $2x$ tales que $|q - p| \leq \log x$.

Resultados sobre diferencias entre primos consecutivos

Sea $S(x)$ la distancia más pequeña entre dos primos en el intervalo $[x+1, 2x]$. Entonces

- $\dfrac{S(x)}{\log x} \leq 1$.
- $\dfrac{S(x)}{\log x} \leq 1 - c$, para infinitos x y alguna $c > 0$ fija (Erdős, 1940).
- $\dfrac{S(x)}{\log x} \leq \dfrac{1}{2}$ para infinitos x (Bombieri-Vinogradov, 1966).
- $\dfrac{S(x)}{\log x} \leq \dfrac{1}{2}e^{-\gamma} = 0{,}2807\ldots$ para infinitos x (Maier 1988).
- $\dfrac{S(x)}{\log x} \leq 1/4$ para infinitos x (Maier).
- $\liminf_{x\to\infty} \dfrac{S(x)}{\log x} = 0$. (Goldston-Pintz-Yildirim, 2005)

Resultados sobre diferencias entre primos consecutivos

Sea $S(x)$ la distancia más pequeña entre dos primos en el intervalo $[x+1, 2x]$. Entonces

- $\dfrac{S(x)}{\log x} \leq 1.$
- $\dfrac{S(x)}{\log x} \leq 1 - c$, para infinitos x y alguna $c > 0$ fija (Erdős, 1940).
- $\dfrac{S(x)}{\log x} \leq \dfrac{1}{2}$ para infinitos x (Bombieri-Vinogradov, 1966).
- $\dfrac{S(x)}{\log x} \leq \dfrac{1}{2}e^{-\gamma} = 0{,}2807\ldots$ para infinitos x (Maier 1988).
- $\dfrac{S(x)}{\log x} \leq 1/4$ para infinitos x (Maier).
- $\liminf\limits_{x\to\infty} \dfrac{S(x)}{\log x} = 0.$ (Goldston-Pintz-Yildirim, 2005)

Resultados sobre diferencias entre primos consecutivos

Sea $S(x)$ la distancia más pequeña entre dos primos en el intervalo $[x+1, 2x]$. Entonces

- $\dfrac{S(x)}{\log x} \leq 1.$
- $\dfrac{S(x)}{\log x} \leq 1 - c$, para infinitos x y alguna $c > 0$ fija (Erdős, 1940).
- $\dfrac{S(x)}{\log x} \leq \dfrac{1}{2}$ para infinitos x (Bombieri-Vinogradov, 1966).
- $\dfrac{S(x)}{\log x} \leq \dfrac{1}{2}e^{-\gamma} = 0{,}2807\ldots$ para infinitos x (Maier 1988).
- $\dfrac{S(x)}{\log x} \leq 1/4$ para infinitos x (Maier).
- $\liminf\limits_{x\to\infty} \dfrac{S(x)}{\log x} = 0.$ (Goldston-Pintz-Yildirim, 2005)

Resultados sobre diferencias entre primos consecutivos

Sea $S(x)$ la distancia más pequeña entre dos primos en el intervalo $[x+1, 2x]$. Entonces

- $\dfrac{S(x)}{\log x} \leq 1.$
- $\dfrac{S(x)}{\log x} \leq 1 - c$, para infinitos x y alguna $c > 0$ fija (Erdős, 1940).
- $\dfrac{S(x)}{\log x} \leq \dfrac{1}{2}$ para infinitos x (Bombieri-Vinogradov, 1966).
- $\dfrac{S(x)}{\log x} \leq \dfrac{1}{2}e^{-\gamma} = 0{,}2807\ldots$ para infinitos x (Maier 1988).
- $\dfrac{S(x)}{\log x} \leq 1/4$ para infinitos x (Maier).
- $\liminf\limits_{x\to\infty} \dfrac{S(x)}{\log x} = 0.$ (Goldston-Pintz-Yildirim, 2005)

Resultados sobre diferencias entre primos consecutivos

Sea $S(x)$ la distancia más pequeña entre dos primos en el intervalo $[x+1, 2x]$. Entonces

- $\dfrac{S(x)}{\log x} \leq 1.$
- $\dfrac{S(x)}{\log x} \leq 1 - c$, para infinitos x y alguna $c > 0$ fija (Erdős, 1940).
- $\dfrac{S(x)}{\log x} \leq \dfrac{1}{2}$ para infinitos x (Bombieri-Vinogradov, 1966).
- $\dfrac{S(x)}{\log x} \leq \dfrac{1}{2}e^{-\gamma} = 0{,}2807\ldots$ para infinitos x (Maier 1988).
- $\dfrac{S(x)}{\log x} \leq 1/4$ para infinitos x (Maier).
- $\liminf_{x\to\infty} \dfrac{S(x)}{\log x} = 0.$ (Goldston-Pintz-Yildirim, 2005)

Goldston-Pintz-Yildirim

Teorema (GPY)

Sea $\epsilon > 0$*, entonces para infinitos* x*,*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{S(x)}{(\log x)^{1/2+\epsilon}} = 0.$$

Además, asumiendo la conjetura de Elliott-Halberstam, demostraron

$$S(x) \leq 16,$$

para infinitos x*.*

Bombieri-Vinogradov

Sea

$$\theta(x; q, m) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv m \bmod q}} \log p.$$

Teorema (Bombieri-Vinogradov)

Sea $A > 0$ un número fijo. Existen constantes $B = B(A)$ y $c = c(A)$ que dependen de A tales que

$$\sum_{q \leq Q} \max_{m \bmod q} \left| \theta(x; q, m) - \frac{x}{\phi(q)} \right| \leq c \frac{x}{(\log x)^A},$$

para $Q = \dfrac{\sqrt{x}}{\log x^A}$.

Elliott-Halberstam

Sea

$$\theta(x;q,m) = \sum_{\substack{p\leq x \\ p\equiv m \text{ mód } q}} \log p.$$

Conjectura (Elliott-Halberstam)

Sean $A > 0$ y $0 < \eta < 1/2$ números fijos. Existe una constante c tal que

$$\sum_{q\leq Q} \max_{m \text{ mód } q} \left| \theta(x;q,m) - \frac{x}{\phi(q)} \right| \leq c \frac{x}{(\log x)^A},$$

para $Q = x^{1/2+\eta}$.

Teorema principal de GPY

El conjunto $\{a_1, a_2, \dots a_k\}$ de enteros $a_1 < a_2 < \dots a_k$ es *admisible* si no existe un primo p tal que p divide a $P(n) = (n + a_1)(n + a_2) \cdots (n + a_k)$ para todos los enteros n.

Teorema

Sean $k \geq 2, \ell \geq 1$ enteros y $0 < \eta < 1/2$ tal que

$$1 + 2\eta > \left(1 + \frac{1}{2\ell + 1}\right)\left(1 + \frac{2\ell + 1}{k}\right).$$

Si la conjetura Elliott Halberstam es cierta para $Q = x^{1/2+\eta}$ y $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ es admisible, entonces hay infinitos enteros n tales que al menos dos de $n + a_1, n + a_2, \dots, n + a_k$ son primos.

El avance de Yitang Zhang

Theorem (Zhang, 14 de mayo, 2013)

Sea $A > 0$. Existen constantes eta, $\delta, c > 0$ tales que para cualquier entero a, tenemos,

$$\sum_{\substack{q \leq Q \\ (q,m)=1 \\ q \text{ is } y-\text{liso} \\ q \text{ libredecuadrados}}} \left| \theta(x; q, m) - \frac{x}{\phi(q)} \right| \leq c \frac{x}{(\log x)^A},$$

donde $Q = x^{1/2+\eta}$ y $y = x^{\delta}$.

Zhang lo demostró para $\eta/2 = \delta = 1/1168$.

El teorema de Yitang Zhang

En mayo 2013, Yitang Zhang, demostró:

Teorema (Zhang)

Sea $k \geq 3500000$. Si $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ es un conjunto admisible, entonces existen infinitos enteros positivos n tales que al menos dos de $n + a_1, n + a_2, \ldots, n + a_k$ son primos.

Corolario

Para infinitos x,

$$S(x) \leq 70000000.$$

Hay un documental de Zhang titulado “Counting from Infinity”.

Avances de Polymath8

Date	ϖ or (ϖ, δ)	k_0	H
Aug 10 2005		6 [EH]	16 [EH] ([Goldston-Pintz-Yildirim])
May 14 2013	1/1,168 (Zhang)	3,500,000 (Zhang)	70,000,000 (Zhang)
May 21			63,374,611 (Lewko)
May 28			59,874,594 (Trudgian)
May 30			59,470,640 (Morrison) 58,885,998? (Tao) 59,093,364 (Morrison) 57,554,086 (Morrison)
May 31		2,947,442 (Morrison) 2,618,607 (Morrison)	48,112,378 (Morrison) 42,543,038 (Morrison) 42,342,946 (Morrison)
Jun 1			42,342,924 (Tao)
Jun 2		866,605 (Morrison)	13,008,612 (Morrison)
Jun 3	1/1,040? (v08ltu)	341,640 (Morrison)	4,982,086 (Morrison) 4,802,222 (Morrison)

Avances de Polymath8

Jun 3	1/1,040? (v08ltu)	341,640 (Morrison)	4,982,086 (Morrison) 4,802,222 (Morrison)
Jun 4	1/224?? (v08ltu) 1/240?? (v08ltu)		4,801,744 (Sutherland) 4,788,240 (Sutherland)
Jun 5		34,429? (Paldi/v08ltu) 34,429? (Tao/v08ltu/Harcos)	4,725,021 (Elsholtz) 4,717,560 (Sutherland) 397,110? (Sutherland) 4,656,298 (Sutherland) 389,922 (Sutherland) 388,310 (Sutherland) 388,284 (Castryck) 388,248 (Sutherland) 388,188 (Sutherland) 387,982 (Castryck) 387,974 (Castryck)
Jun 6	~~(1/488,3/9272)~~ (Pintz) ~~1/552~~ (Pintz, Tao)	~~60,000*~~ (Pintz) ~~52,295*~~ (Peake) ~~11,123~~ (Tao)	387,960 (Angelveit) 387,910 (Sutherland) 387,904 (Angeltveit) 387,814 (Sutherland) 387,766 (Sutherland) 387,754 (Sutherland) 387,620 (Sutherland)

Avances de Polymath8

			~~768,534*~~ (Pintz)
Jun 7	~~(1/538, 1/660)~~ (v08ltu) ~~(1/538, 31/20444)~~ (v08ltu) ~~(1/942, 19/27004)~~ (v08ltu) $828\varpi + 172\delta < 1$ (v08ltu/Green)	~~11,018~~ (Tao) ~~10,721~~ (v08ltu) ~~10,719~~ (v08ltu) ~~25,111~~ (v08ltu) 26,024? (vo8ltu)	~~113,520~~? (Angeltveit) ~~109,314~~? (Angeltveit/Sutherland) ~~707,328*~~ (Sutherland) ~~108,990~~ (Sutherland) ~~113,462*~~ (Sutherland) ~~112,302*~~ (Sutherland) ~~112,272*~~ (Sutherland) ~~116,386*~~ (Sun) ~~108,978~~ (Sutherland) ~~108,634~~ (Sutherland) ~~108,632~~ (Castryck) ~~108,600~~ (Sutherland) ~~108,570~~ (Castryck) ~~108,556~~ (Sutherland) ~~108,550~~ (xfxie) ~~275,424~~ (Sutherland) ~~108,540~~ (Sutherland) ~~275,418~~ (Sutherland) ~~275,404~~ (Sutherland) ~~275,292~~ (Castryck-Sutherland)

Avances de Polymath8

Jun 24	$(134+\frac{2}{3})\varpi+28\delta\leq 1$? (v08ltu) $140\varpi+32\delta<1$? (Tao) ~~1/88?? (Tao)~~ ~~1/74?? (Tao)~~	1,268? (v08ltu)	10,206? (Engelsma)
Jun 25	$116\varpi+30\delta<1$? (Fouvry-Kowalski-Michel-Nelson/Tao)	1,346? (Hannes) ~~502?? (Trevino)~~ 1,007? (Hannes)	10,876? (Engelsma) ~~3,612?? (Engelsma)~~ 7,860? (Engelsma)
Jun 26	$116\varpi+25.5\delta<1$? (Nielsen) $(112+\frac{4}{7})\varpi+(27+\frac{6}{7})\delta<1$? (Tao)	962? (Hannes)	7,470? (Engelsma)
Jun 27	$108\varpi+30\delta<1$? (Tao)	902? (Hannes)	6,966? (Engelsma)
Jul 1	$(93+\frac{1}{3})\varpi+(26+\frac{2}{3})\delta<1$? (Tao)	873? (Hannes) ~~872? (xfxie)~~	6,712? (Sutherland) ~~6,696? (Engelsma)~~
Jul 5	$(93+\frac{1}{3})\varpi+(26+\frac{2}{3})\delta<1$ (Tao)	720 (xfxie/Harcos)	5,414 (Engelsma)
Jul 10	7/600? (Tao)		
Jul 19	$(85+\frac{5}{7})\varpi+(25+\frac{5}{7})\delta<1$?		

Avances de Polymath8

Polymath8 logró mejorar el resultado de Zhang a:

$$S(x) \leq 4680$$

para infinitos x.

En resumen:

- $\eta \leq 7/300$ (mejorando $\eta \leq 1/584$ de Zhang)
- $k = 632$ (mejorando $k = 3500000$)
- $S(x) \leq 4680$ (mejorando 70 000 000).

Maynard and Polymath8b

En noviembre 2013, James Maynard, atacó el problema por otro lado, usando una criba de Selberg multi-dimensional.

Teorema (Maynard)

Para infinitos x:

$$S(x) \leq 600.$$

Además si la conjetura de Elliott-Halberstam es cierta, entonces para infinitos x

$$S(x) \leq 12.$$

Conjuntos admisibles

Teorema (Maynard)

Sea m un entero positivo. Para $k \gg m^3 e^{4m}$, cualquier conjunto admisible de k elementos $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ cumple que existen infinitos n tales que al menos m de $n + a_1, n + a_2, \ldots, n + a_k$ son primos. En particular, existen infinitos primos p tales que hay m primos entre p y $p + Cm^3 e^{4m}$ (para alguna constante positiva C).

Polymath8b

Polymath8 se unió con Maynard y mejoraron los resultados. Demostraron

Teorema (Polymath8b)

Para infinitos x,

$$S(x) \leq 246.$$

Además si la conjetura $\mathit{Elliott} - \mathit{Halberstam}$ es cierta, entonces para infinitos x,

$$S(x) \leq 6.$$

Polymath8b también mejoró el resultado de conjuntos admisibles. Mejoraron la cota $m^3 e^{4m}$ a $me^{\left(4-\frac{28}{157}\right)m}$.

Diferencias grandes entre primos consecutivos

- Considera la secuencia $n! + 2, n! + 3, \ldots, n! + n$. Esta secuencia muestra que puedes tener diferencia entre dos primos consecutivos $\geq n$ para cualquier entero n. Sin embargo, el tamaño de $n!$ es muy grande. Esta demostración sería equivalente a mostrar que hay una diferencia de al menos $\log x / \log \log x$ entre los números del 1 al x. Como la diferencia promedio es $\log x$, está demostración no es muy fuerte.
- Erdős fue uno de los primeros en demostrar un resultado ganandole al teorema de los números primos demostrando que existe una constante $C > 0$ tal que hay primos consecutivos a distancia al menos

$$C \log x \frac{\log \log x}{(\log \log \log x)^2}.$$

- En 1963, Rankin lo mejoró a la cota inferior

$$c_0 \log x \frac{\log \log x \log \log \log \log x}{(\log \log \log x)^2}.$$

Avances recientes

- El resultado de Rankin del 1963 tenía la cota inferior

$$c_0 \log x \frac{\log \log x \log \log \log \log x}{(\log \log \log x)^2},$$

  para alguna constante c_0. En particular Rankin demostró $c_0 = 1/3$ cumple.
- c_0 se fue subiendo hasta $2e^\gamma$ por Pintz en 1997.
- En el 2016, Ford, Green, Konyagin y Tao demostraron que $c_0 \to \infty$.
- Maynard también demostró $c_0 \to \infty$ en 2016.
- En equipo entre Maynard y Ford-Green-Konyagin-Tao en el 2018, mejoraron la cota a

$$c_1 \log x \frac{\log \log x \log \log \log \log x}{\log \log \log x},$$

  para alguna constante c_1.

Goldbach

Conjectura (Goldbach)

Todo número par $n \geq 4$ se puede escribir como la suma de dos primos.

- La conjetura se sabe cierta para $n \leq 4 \times 10^{18}$ (Oliveira e Silva 2013).
- Chen en 1973 demostró que todo par n suficientemente grande se puede escribir como la suma de un primo con un número que tiene a lo más dos divisores primos.
- Chudakov, Estermann y van der Corput en 1937-1938 demostraron que "casi todos" los números pares se pueden escribir como suma de dos primos.

Conjetura débil de los números primos

Conjectura (Goldbach débil)

Todo número impar $n \geq 7$ se puede escribir como la suma de tres primos.

- En 1937, demostró que existe una constante C tal que todo impar $n > C$ se puede escribir como suma de tres primos.
- En 1939, Borodzkin demostró que $C = e^{e^{e^{41,96}}}$ cumple.
- C se fue mejorando hasta llegar (Liu-Wang 2002) a que $C = 2 \cdot 10^{1346}$ cumple.
- En 1995, Ramaré demostró que todo par n se puede escribir como suma de a lo más 6 primos.
- En 2012, Tao demostró que todo impar n se puede escribir como suma de a lo más 5 primos.

Goldbach débil

Teorema (Helfgott)

Todo $n \geq 7$ impar se puede escribir como suma de tres primos.

Muchas gracias por su atención.