Explorando un problema de teoría de números que nace de un problema de la OMM 2017

Enrique Treviño

2 de febrero de 2021

El problema 2 de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas del 2017 dice

Problema. *Un conjunto de n números enteros positivos distintos es equilibrado, si el promedio de cualesquiera k números del conjunto es un número entero, para toda $1 \leq k \leq n$. Encuentra la mayor suma que pueden tener los elementos de un conjunto equilibrado, con todos sus elementos menores o iguales que 2017.*

Solución. Supongamos $S = \{s_1, s_2 \ldots, s_n\}$ es un conjunto equilibrado. Sea $k \leq n-1$. Entonces $s_1 + s_2 + \ldots + s_{k-1} + s_k \equiv 0 \text{ mód } k$ y para cualquier $s \in S$ distinto de $s_1, s_2, \ldots, s_k$ tenemos $s_1 + s_2 + \ldots + s_{k-1} + s \equiv 0 \text{ mód } k$. Por lo tanto $s \equiv s_k \text{ mód } k$. Reordenando podemos ver que todos los elementos de S son congruentes módulo k. Como esto es cierto para cualquier $k \leq n-1$, entonces todos los elementos de S son congruentes módulo $\text{mcm}\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Si $n \geq 8$, entonces $\text{mcm}\{1, 2, \ldots, n-1\} \geq \text{mcm}\{1, 2, \ldots, 7\} = 420$. Como no podemos tener un conjunto con 8 elementos congruentes módulo 420 entre 1 y 2017, entonces $n \leq 7$. Con 7 elementos, el conjunto equilibrado con números más grandes posibles es $\{2017, 2017-60, 2017-2\cdot 60, \ldots, 2017-6\cdot 60\}$ y su suma es 12859. Como cualquier subconjunto de 6 o menos elementos tiene suma menor a $6 \cdot 2017 = 12102$, entonces la mayor suma posible es 12859.

□

En el problema resulta que la suma máxima ocurre en el conjunto equilibrado con más elementos. ¿Qué pasa si en lugar de conjuntos equilibrados con elementos menores o iguales a 2017, consideramos conjuntos equilibrados con elementos menores o iguales a 3000?

En el problema original, no hay conjuntos equilibrados con 8 elementos, pero en esta versión si los hay, ya que $\{3000, 3000-420, 3000-2\cdot 420, \ldots, 3000-7\cdot 420\}$ es equilibrado porque los 8 elementos son positivos ($3000 - 7 \cdot 420 = 60 > 0$), son congruentes módulo $\text{mcm}\{1, 2, \ldots, 7\} = 420$, y su promedio es 1530. Ese conjunto tiene suma 12240, mientras el conjunto equilibrado de 7 elementos $\{3000, 2940, 2880, \ldots, 3000-6\cdot 60\}$ tiene suma 19740. Con 6 o menos elementos, la suma sería menor a 18000, por lo tanto la suma máxima es 19740 y ocurre con un conjunto equilibrado de 7 elementos. Es decir, que el conjunto equilibrado con suma máxima en el problema original es el conjunto equilibrado con mayor número de elementos (con sus elementos lo más grandes posibles), es una coincidencia.

Esto nos invita a considerar el siguiente problema:

Problema. *Sea N un entero positivo. Sea $M(N)$ el tamaño más grande que puede tener un conjunto equilibrado con todos sus elementos menores o iguales a N. Sea $S(N)$ el tamaño del conjunto equilibrado con todos sus elementos menores o iguales a N cuya suma es máxima. Encuentra valores de N tales que $M(N) = S(N)$.*

Por ejemplo, tenemos que $N = 2017$ cumple ya que $M(2017) = S(2017) = 7$, mientras $N = 3000$ no cumple porque $M(3000) = 8! = 7 = S(3000)$. Haciendo cuentas usando una computadora, tenemos que $M(N) = S(N)$ para los siguientes valores de $N \leq 1000000$:

$$\begin{aligned} 1 \leq N &\leq 18 \\ 31 \leq N &\leq 48 \\ 85 \leq N &\leq 300 \\ 571 \leq N &\leq 2940 \\ 18481 \leq N &\leq 22680 \\ 54181 \leq N &\leq 304920 \end{aligned}$$

Analicemos los números a la derecha, es decir, 18, 48, ... Tenemos que $18 = 3 \cdot 6$, $48 = 4 \cdot 12$, $300 = 5 \cdot 60$, $2940 = 7 \cdot 420$. Los números $2, 3, 12, 60, 420$ salen de calcular $\text{mcm}\{1, 2, 3, \ldots, \ell\}$ para $\ell = 2, 3, 4, 5, 7$, respectivamente. Sea $L(m) = \text{mcm}\{1, 2, \ldots, m\}$, entonces tenemos $18 = 3L(3)$, $48 = 4L(4)$, $300 = 5L(5)$, $2940 = 7L(7)$, $22680 = 9L(9)$ y $304920 = 11L(11)$. En particular, parece que algunos enteros positivos $m \geq 3$ tales que $M(mL(m)) = S(mL(m))$ y $M(mL(m)+1) \neq S(mL(m)+1)$. Para poder demostrar este tipo de cosas nos conviene analizar conjuntos equilibrados con elementos menores o iguales a N. El siguiente lema nos dice cual es la suma máxima cuando fijamos el tamaño del conjunto equilibrado.

Lema 1. *El conjunto equilibrado con $m \geq 3$ elementos menores o iguales a N cuya suma es máxima es $\{N, N - L(m-1), N - 2L(m-1), \ldots, N - (m-1)L(m-1)\}$. La suma máxima es*

$$mN - \frac{m(m-1)}{2}L(m-1).$$

Demostración. Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ un conjunto equilibrado con m elementos. Sea $k \leq m-1$. Entonces $a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_{k-1}} + a_{i_k} \equiv a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_{k-1}} + a_{i_{k+1}} \text{ mód } k$ para cualesquiera índices $i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1}$. Eso implica $a_{i_k} \equiv a_{i_{k+1}} \text{ mód } k$. Como es cierto para cualesquiera índices, tenemos que $a_1 \equiv a_2 \equiv \ldots \equiv a_m \text{ mód } k$. Como esto es cierto para todo $k \leq m-1$, entonces los elementos son congruentes módulo el mínimo común múltiplo de $\{1, 2, \ldots, m-1\}$, que es $L(m-1)$. El conjunto con elementos menores o iguales a N que tiene elementos lo más grandes posibles que son congruentes módulo $L(m-1)$ es

$$\{N, N - L(m-1), N - 2L(m-1), \ldots, N - (m-1)L(m-1)\}.$$

Nos falta mostrar que es equilibrado. Eso se debe a que el promedio de sus m elementos es

$$N - \frac{m(m-1)}{2m}L(m-1) = N - \frac{m-1}{2}L(m-1).$$

Como $L(m-1)$ es par para $m \geq 3$, entonces el promedio es entero.

□

El siguiente lema nos permite calcular $M(N)$ en general.

Lema 2. *Sea $m \geq 3$ un entero positivo. Entonces $M(N) = m$ si y solo si $(m-1)L(m-1) + 1 \leq N \leq mL(m)$.*

Demostración. Si $N \leq (m-1)L(m-1)$ entonces, no podemos tener un conjunto equilibrado con m elementos, ya que los m elementos tendrían que ser congruentes módulo $L(m-1)$ y no hay m enteros positivos menores o iguales a $(m-1)L(m-1)$ que sean congruentes módulo $L(m-1)$. Para $N \geq (m-1)L(m-1)+1$, el conjunto $\{N, N-L(m-1), \dots, N-(m-1)L(m-1)\}$ es equilibrado. Por lo tanto $M(N) \geq m$. Para $N \leq mL(m)$, no podemos tener conjuntos equilibrados de $m+1$ elementos. Por lo tanto $M(N) \leq m$. Por lo tanto $M(N) = m$.

□

Ahora podemos demostrar que hay infinitos enteros m tales que $M(mL(m)) = S(mL(m))$ y $M(mL(m)+1) > S(mL(m)+1)$.

Teorema 1. *Sea $m \geq 3$ un primo. Entonces $M(mL(m)) = S(mL(m))$ y $M(mL(m)+1) > S(mL(m)+1)$.*

Demostración. Demostremos primero que $M(mL(m)) = S(mL(m))$. Consideremos conjuntos equilibrados cuyo máximo elemento es menor o igual a $mL(m)$. Por el Lema 2 tenemos que $M(mL(m)) = m$. Por el Lema 1, la suma máxima de un conjunto equilibrado con m elementos menores o iguales a $mL(m)$ es

$$m^2L(m) - \frac{m(m-1)}{2}L(m-1).$$

Como m es primo, entonces $L(m-1) = L(m)/m$. Por lo tanto tenemos que la suma es

$$m^2L(m) - \frac{m-1}{2}L(m) = mL(m)\left(m - \frac{1}{2} + \frac{1}{2m}\right) > mL(m)(m-1).$$

Un conjunto equilibrado con menos de m elementos menores o iguales a $mL(m)$ tendría suma menor a $mL(m)(m-1)$. Por lo tanto $M(mL(m)) = S(mL(m))$.

Ahora demostremos que $M(mL(m)+1) > S(mL(m)+1)$. Por el Lema 2, $M(mL(m)+1) = m+1$. Por el Lema 1, la suma máxima de un conjunto equilibrado con $m+1$ elementos es

$$(m+1)(mL(m)+1) - \frac{m(m+1)}{2}L(m). \tag{1}$$

La suma máxima de un conjunto equilibrado con m elementos es

$$m(mL(m)+1) - \frac{m(m-1)}{2}L(m-1). \tag{2}$$

Usando que $L(m-1) = L(m)/m$ para m primo, tenemos que si le restamos (1) a (2) nos queda

$$\frac{m(m+1)}{2}L(m) - \frac{m(m-1)}{2m}L(m) - mL(m) - 1.$$

Pero, como $m \geq 3$, tenemos

$$\frac{mL(m)}{2}\left(m - 2 + \frac{1}{m}\right) - 1 > \frac{mL(m)}{2} - 1 > 0.$$

Por lo tanto $S(mL(m)+1) \leq m < m+1 = M(mL(m)+1)$.

□

Esto implica que hay infinos números N tales que $M(N) = S(N)$ e infinitos números N tales que $M(N) \neq S(N)$.

Entonces tenemos que para $m \geq 3$ primo, $M(mL(m)) = S(mL(m))$. ¿Qué pasa cuando m no es primo? Esto no es tan fácil de contestar en general, ya que hay algunos casos donde m no es primo que satisfacen $S(mL(m)) = M(mL(m))$, por ejemplo $m = 4, 9, 121$. Pero parece que la mayoría de los casos involucran a m primo. Para poder demostrar algo cuando m no es primo, necesitaremos el siguiente postulado conocido.

Postulado de Bertrand
Para cualquier número real $x \geq 1$ existe un primo p que satisface $x < p \leq 2x$.

Con el postulado de Bertrand a la mano, podemos demostrar el siguiente resultado que nos muestra muchos valores de m tales que $M(mL(m)) \neq S(mL(m))$.

Teorema 2. *Sea $m \geq 3$ un entero que no es potencia de primo. Entonces $M(mL(m)) > S(mL(m))$.*

Demostración. Por el Lema 2 tenemos que $M(mL(m)) = m$. Entonces queremos demostrar que $S(mL(m)) < m$. Sea p el primo menor a m más cercano a m. Entonces

$$L(p-1) = \frac{L(p)}{p} \leq \frac{L(m)}{p}.$$

Por el postulado de Bertrand tenemos que hay un primo q tal que $\frac{m}{2} + \frac{3}{4} < q < m + \frac{3}{2}$. Como $m + \frac{3}{2}$ no es entero entonces $q \leq m+1$, como $\frac{m}{2} + \frac{3}{4}$ no es entero entonces $q \geq \frac{m}{2} + 1$. Si $m+1$ no es primo, como m tampoco es primo, entonces tenemos un primo q tal que $\frac{m}{2} + 1 \leq q \leq m - 1$. Ahora, si $m+1$ es primo, por el postulado de Bertrand tenemos que hay un primo r tal que $\frac{m}{2} + \frac{1}{4} < r \leq m + \frac{1}{2}$. Como $\frac{m}{2} + \frac{1}{4}$ no es entero, entonces $r \geq \frac{m}{2} + \frac{1}{2}$. Como $m+1$ es primo y $m \geq 3$, entonces $\frac{m}{2} + \frac{1}{2}$ no es entero. Por lo tanto $r \geq \frac{m}{2} + 1$. Como $m + \frac{1}{2}$ no es entero y m no es primo, entonces $\frac{m}{2} + 1 \leq r \leq m - 1$. Entonces, sin importar si $m+1$ es primo o no, existe un primo entre $\frac{m}{2} + 1$ y $m - 1$. Por lo tanto, el primo p satisface $\frac{m}{2} + 1 \leq p \leq m - 1$.

También sabemos que como m no es potencia de primo, entonces $L(m-1) = L(m)$ ya que si $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, entonces $p_i^{\alpha_i}$ es un número entre 1 y $m-1$, y por lo tanto divide a $L(m-1)$. Ahora, por el Lema 1, tenemos que el conjunto equilibrado con m elementos de suma máxima tiene suma

$$m^2 L(m) - \frac{m(m-1)}{2} L(m-1) = m^2 L(m) - \frac{m(m-1)}{2} L(m) = L(m)\left(\frac{m^2 + m}{2}\right), \tag{3}$$

mientras que el conjunto equilibrado con p elementos de suma máxima tiene suma

$$pmL(m) - \frac{p(p-1)}{2} L(p-1) \geq pmL(m) - \frac{p(p-1)}{2p} L(m) = pmL(m) - \frac{p-1}{2} L(m). \tag{4}$$

Como $mL(m) < L(m)$ para $m \geq 2$, entonces la expresión en el lado derecho de (4) es creciente con p, por lo tanto es mínima cuando p es mínimo. En particular la suma máxima de un conjunto equilibrado con p elementos es mayor a

$$\left(\frac{m}{2} + 1\right) mL(m) - \frac{\frac{m}{2} + 1 - 1}{2} L(m) = L(m)\left(\frac{m^2}{2} + m - \frac{m}{4}\right) > L(m)\left(\frac{m^2}{2} + \frac{m}{2}\right).$$

Pero entonces la suma con p elementos le gana a la suma con m elementos, por lo tanto $S(mL(m)) < m$.

□

Entonces sabemos que cuando $N = mL(m)$, si $M(N) = S(N)$ entonces m es potencia de primo. También sabemos que $M(N) = S(N)$ siempre que m es primo. No hemos logrado clasificarlos todos, pero podemos casi terminar la pregunta de para cuales m se puede que $M(mL(m)) = S(mL(m))$. En particular, vamos a demostrar que si $m = p^k$ para algún primo p y algún exponente $k \geq 3$, entonces $M(mL(m)) > S(mL(m))$ si $m > 10^{10^{15}}$. Para poder demostrar esto, necesitamos una generalización de Bertrand. El siguiente teorema demostrado por Dudek [1], casi nos será suficiente:

Teorema. *Para todo entero $m \geq e^{e^{33,3}}$, donde $e = 2{,}718\ldots$, existe alún primo p tal que*

$$(m-1)^3 < p < m^3.$$

En particular, existe un primo p tal que $m^3 - 3m^2 \leq p < m^3$.

Lo que nosotros necesitamos es la siguiente versión que es fácil demostrar siguiendo los pasos de Dudek, pero cuya demostración no incluiremos.

Lema 3. *Para todo entero $m \geq 10^{10^{15}}$ existe un primo p tal que*

$$m^3 - \frac{1}{4}m^2 < p < m^3.$$

Ahora podemos probar nuestro último teorema

Teorema 3. *Si $m \geq 10^{10^{15}}$ es de la forma q^k para algún primo q y alguna potencia $k \geq 3$, entonces $M(mL(m)) > S(mL(m))$.*

Demostración. Basta demostrar que $S(mL(m)) < m$. Primero no temos que $L(m-1) = L(m)/q$ ya que $m = q^k$. Ahora, sea p el primo más grande menor a m. Por el Lema 3, $p > m - \frac{1}{4}m^{2/3}$. Por el Lema 1, tenemos que el conjunto equilibrado de suma máxima con m elementos tiene suma

$$m^2L(m) - \frac{m(m-1)}{2}L(m-1) = m^2L(m) - \frac{m(m-1)}{2q}L(m), \tag{5}$$

mientras que la suma del conjunto equilibrado con mayor suma de p elementos es

$$pmL(m) - \frac{p(p-1)}{2}L(p-1) \geq pmL(m) - \frac{p(p-1)}{2qp}L(m) = pmL(m) - \frac{p-1}{2q}L(m), \tag{6}$$

ya que $L(p-1) = \frac{L(p)}{p} \leq \frac{L(m-1)}{p} = \frac{L(m)}{pq}$.

Restando (5) de (6) nos lleva a que la suma con p elementos - la suma con m elementos es al menos

$$\frac{L(m)}{2q}\left(2qpm - p + 1 - 2qm^2 + m^2 - m\right).$$

Como $2qm > 0$ entonces la expresión es creciente con p, por lo tanto, al usar que $p > m - \frac{1}{2}m^{2/3}$ tenemos la cota

$$\frac{L(m)}{2q}\left(-\frac{q}{2}m^{5/3} + \frac{1}{4}m^{2/3} + 1 + m^2 - 2m\right).$$

Como $k \geq 3$, entonces $q = m^{1/k} \leq m^{1/3}$. Por lo tanto, la diferencia es al menos

$$\frac{L(m)}{2q}\left(\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{4}m^{2/3} + 1 - 2m\right).$$

Esta última expresión es positiva para $m \geq 4$.

□

Estaría genial poder demostrar que el teorema anterior es cierto para todo $m \geq 3$ y clasificar los primos p tales que $M(p^2L(p^2)) = S(p^2L(p^2))$, pero eso se ve difícil con las herramientas conocidas de teoría de números. En particular, la conjetura de que hay infinitos primos p tales que $M(p^2L(p)) = S(p^2L(p))$ no se ve descabellada.

Referencias

[1] Adrian W. Dudek, *An explicit result for primes between cubes*, Funct. Approx. Comment. Math. **55** (2016), no. 2, 177–197. MR 3584567