Paradojas matemáticas en probabilidad

Enrique Treviño

LAKE FOREST COLLEGE

EMALCA 2022 RD
3 de junio de 2022

Paradoja del cumpleaños I

Supongamos que hay 40 personas en un salón. ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas tengan el mismo cumpleaños?

(A) 10%
(B) 25%
(C) 50%
(D) 75%
(E) 90%

Paradoja del cumpleaños II

Supongamos que hay 100 personas en un salón. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga una persona con el mismo cumpleaños que tú?

(A) 10%
(B) 25%
(C) 50%
(D) 75%
(E) 90%

Introducción a la probabilidad

- ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar un dado, caiga 4?

Introducción a la probabilidad

- ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar un dado, caiga 4?
- $$\frac{1}{6} = 0.166\ldots \approx 17\%.$$

Introducción a la probabilidad

- ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar un dado, caiga 4?
- $$\frac{1}{6} = 0.166\ldots \approx 17\%.$$
- ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar un dado, caiga en un número par?

Introducción a la probabilidad

- ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar un dado, caiga 4?
- $$\frac{1}{6} = 0.166\ldots \approx 17\%.$$
- ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar un dado, caiga en un número par?
- $$\frac{3}{6} = 0.5 = 50\%.$$

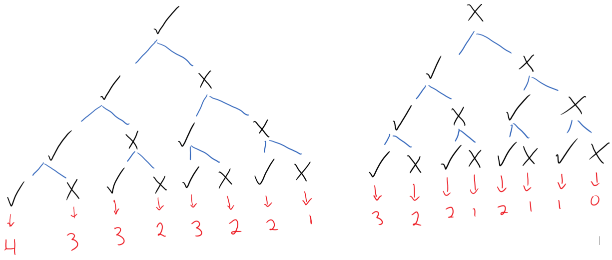
Introducción a la probabilidad

- ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar un dado, caiga 4?
- $$\frac{1}{6} = 0.166\ldots \approx 17\%.$$
- ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar un dado, caiga en un número par?
- $$\frac{3}{6} = 0.5 = 50\%.$$
- ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar dos dados, su suma sea 7?

- ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar un dado, caiga 4?
- $$\frac{1}{6} = 0.166\ldots \approx 17\%.$$
- ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar un dado, caiga en un número par?
- $$\frac{3}{6} = 0.5 = 50\%.$$
- ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar dos dados, su suma sea 7?
- Hay 36 posibilidades para la pareja de dados. Para que sumen 7, necesitamos tener alguna de:
  $1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1$. Por lo tanto
  $$\frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0.166\ldots \approx 17\%.$$

Un ejemplo un poco más complicado

Supongamos que un alumno tiene un examen con 4 preguntas de falso o verdadero. El alumno no tiene idea de cual es la respuesta correcta en ninguna de las 4 preguntas, así que elige sus respuestas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que saque 75% o más?



Otro ejemplo

Supongamos que un alumno tiene un examen con 4 preguntas de falso o verdadero. El alumno no tiene idea de cual es la respuesta correcta en ninguna de las 4 preguntas, así que elige sus respuestas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que saque 50%?

Solución

La primera tacha tiene 4 posibilidades.
La segunda tacha tiene 3 posibilidades.
Por simetría tenemos que dividir entre dos para concluir que hay

$$\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

maneras de poner dos tachas en 4 preguntas. La probabilidad es

$$\frac{6}{16} = 0.375 = 37.5\%.$$

Paradoja del cumpleaños I

Supongamos que hay 40 personas en un salón. ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas tengan el mismo cumpleaños?

Paradoja del cumpleaños I

Supongamos que hay 40 personas en un salón. ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas tengan el mismo cumpleaños?

Solución

La probabilidad de que nadie tenga el mismo cumpleaños es

$$\frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot 326}{365^{40}} = 0.108768\ldots$$

Por lo tanto la probabilidad de que haya dos personas con el mismo cumpleaños es

$$1 - 0.108768\ldots = 0.891232\ldots \approx 89\%.$$

Paradoja del cumpleaños II

Supongamos que hay 100 personas en un salón. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga una persona con el mismo cumpleaños que yo?

Paradoja del cumpleaños II

Supongamos que hay 100 personas en un salón. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga una persona con el mismo cumpleaños que yo?

Solución

La probabilidad de que una persona no tenga mi cumpleaños es $\frac{364}{365}$. *Entonces la probabilidad de que 100 personas no tengan mi cumpleaños es*

$$\left(\frac{364}{365}\right)^{100}.$$

Por lo tanto, la probabilidad de que haya una persona con mi cumpleaños es

$$1-\left(\frac{364}{365}\right)^{100} = 0.239933\ldots \approx 24\%$$

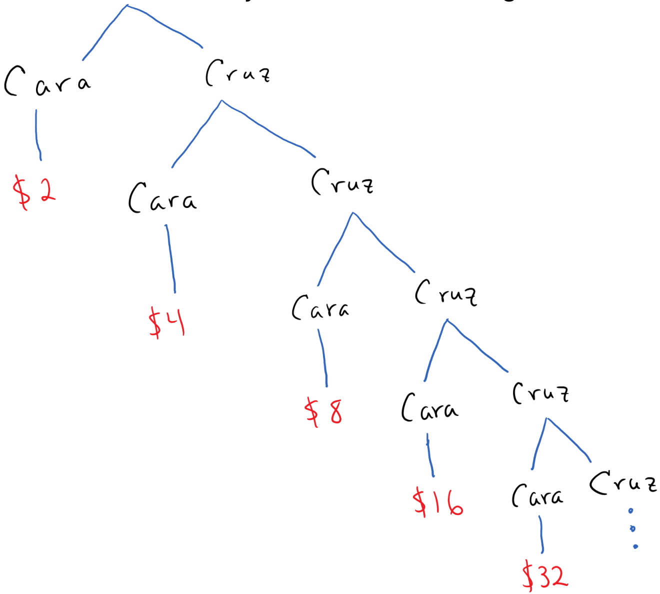
Paradoja de San Petersburgo

El juego de San Petersburgo es el siguiente:

Lanzamos una moneda. Si cae cara nos pagan \$2, si cae cruz lanzamos de nuevo. Si cae cara en el segundo intento nos pagan \$4, si cae cruz los primeros dos intentos, lanzamos de nuevo. Si cae cara en el tercer intento nos pagan \$8, si cae cruz en los primeros tres intentos, lanzamos de nuevo. Así continuamos. Si cae cruz los primeros $k-1$ *intentos y cae cara en el* k*-ésimo nos pagan* $\$\,2^k$.

La pregunta es ¿cuánto estaría dispuesto a pagar un jugador racional?

Paradoja de San Petersburgo



Ejemplo de Juego

Supongamos que lanzamos una moneda. Si cae cara nos pagan \$2, si cae cruz nada. ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar un jugador racional?

Solución

Queremos calcular cuanto paga el juego en promedio para decidir cuanto podría pagar un jugador racional para no perder dinero.
La mitad del tiempo cae cara y nos pagan \$2. La mitad del tiempo no nos pagan nada. Entonces en promedio el juego paga

$$\left(\frac{1}{2}\right)2+\left(\frac{1}{2}\right)0=1.$$

Un jugador racional estaría dispuesto a pagar \$1.

Otro Ejemplo

Supongamos que lanzamos un dado y nos pagan el número en que caiga. ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar un jugador racional?

Solución

Una sexta parte del tiempo nos paga $1, otra sexta parte $2, otra sexta parte $3, etcétera. Por lo tanto en promedio, el juego paga

$$\left(\frac{1}{6}\right)1+\left(\frac{1}{6}\right)2+\cdots+\left(\frac{1}{6}\right)6.$$

Esta suma es

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{21}{6}=3.5.$$

Un jugador racional estaría dispuesto a pagar $3.5.

Paradoja de San Petersburgo

La probabilidad de que caiga cara a la primera es $1/2$. En tal caso nos pagan \$2.
La probabilidad de que caiga cara a la segunda es $1/4$. En tal caso nos pagan \$4.
En general, la probabilidad de que caiga cara a la tercera es $1/8$. En tal caso nos pagan \$8.
En promedio el juego paga

$$\left(\frac{1}{2}\right)2+\left(\frac{1}{4}\right)4+\left(\frac{1}{8}\right)8+\cdots=$$
$$1+1+1+\cdots=\infty.$$

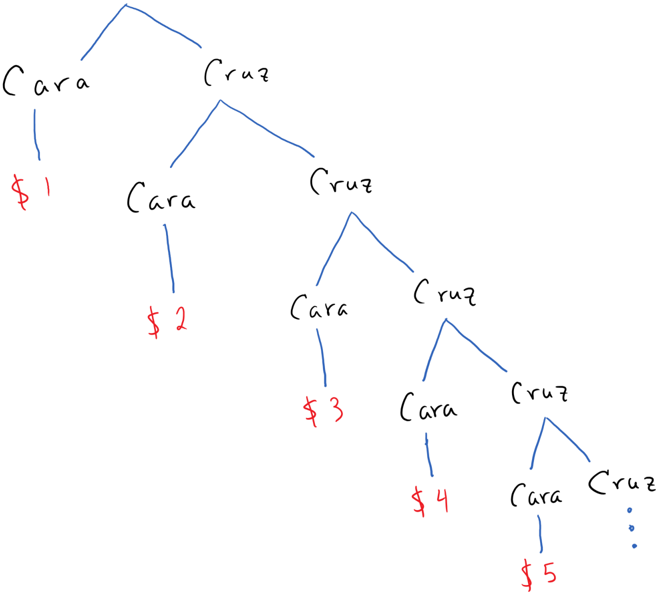
Algunos matemáticos y economistas que han estudiado la paradoja de San Petersburgo

- Nicholas Bernoulli. La introdujo en 1713.
- Daniel Bernoulli. La analizó en 1738 en San Petersburgo.
- Lloyd Shapley (Premio Nobel de Economía 2012).

Versión más natural

Lanzamos una moneda. Si cae cara nos pagan \$1, si cae cruz lanzamos de nuevo. Si cae cara en el segundo intento nos pagan \$2, si cae cruz los primeros dos intentos, lanzamos de nuevo. Si cae cara en el tercer intento nos pagan \$3, si cae cruz en los primeros tres intentos, lanzamos de nuevo. Así continuamos. Si cae cruz los primeros $k - 1$ *intentos y cae cara en el* k*-ésimo nos pagan* $\$ k$.

La pregunta es ¿cuánto estaría dispuesto a pagar un jugador racional?


Cara
Cruz
$ 1
Cara
Cruz
$ 2
Cara
Cruz
$ 3
Cara
Cruz
$ 4
Cara
Cruz
$ 5

Solución versión natural

La probabilidad de ganar \$1 es $\frac{1}{2}$. La probabilidad de ganar \$2 es $\frac{1}{4}$. En general la probabilidad de ganar k es $\frac{1}{2^k}$. Entonces en promedio, el juego paga

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\cdots=$$

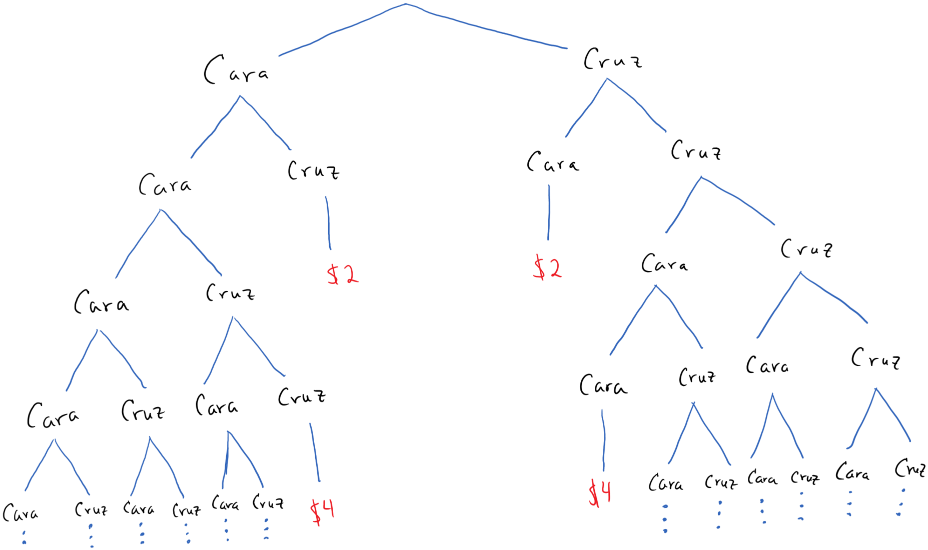
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}&+\cdots\\
+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}&+\cdots\\
+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}&+\cdots\\
+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}&+\cdots\\
+\cdots&=
\end{aligned}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots=2.$$

Variante con monedas

Lanzamos una moneda hasta que el número de caras sea igual al número de cruces. Si eso pasa después de lanzar la moneda k veces, nos pagan \$ k.

¿Cuánto estaría dispuesto a pagar un jugador racional?

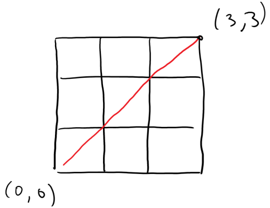

Cara
Cruz
Cara
Cruz
Cara
Cruz
Cara
Cruz
$2
$2
Cara
Cruz
Cara
Cruz
Cara
Cruz
Cara
Cruz
Cara
Cruz
Cara
Cruz
Cara
Cruz
Cara
Cruz
Cara
Cruz
$4
$4
Cara
Cruz
Cara
Cruz
Cara
Cruz

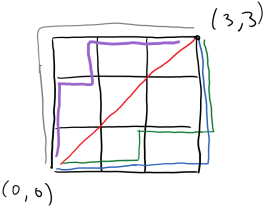
Algunas probabilidades

En el diagrama podemos ver que la probabilidad de que nos paguen \$2 es $\frac{1}{2}$.

La probabilidad de que nos paguen \$ 4 es $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.

Calculemos la probabilidad de que nos paguen \$ 6.
Queremos contar de ¿cuántas maneras tenemos 3 caras y 3 cruces sin tener un empate antes?



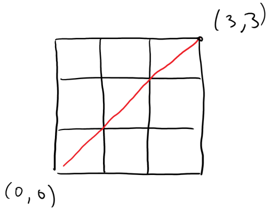


Entonces la probabilidad de que nos paguen $6 es

$$\frac{4}{2^6} = \frac{1}{16}.$$

Problema clásico de conteo

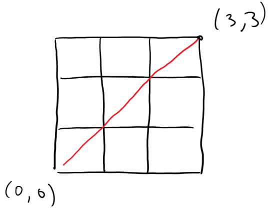
En un tablero de $n \times n$,¿ cuántos caminos hay de la esquina inferior izquierda a la esquina superior derecha con puros pasos a la derecha y arriba?



Solución

$$\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{n(n-1)\cdots 1} = \binom{2n}{n}.$$

En un tablero de $n \times n$,¿ cuántos caminos hay de la esquina inferior izquierda a la esquina superior derecha con puros pasos a la derecha y arriba de tal manera que nunca atraviese la diagonal?



Solución

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

En el juego donde nos pagan $ $2k$ si toma $2k$ lanzamientos de moneda para que tengamos el mismo número de caras que de cruces. ¿Cuál es la probabilidad de que nos paguen $ $2k$?

Solución

Tenemos que contar caminos de (0,0) a (k, k) de tal manera que no toquemos la diagonal. La probabilidad es

$$\frac{2}{2^{2k}k}\binom{2k-2}{k-1}.$$

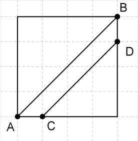


Figure: *Ejemplo de $k = 8$. Tenemos que evitar la diagonal $\overline{AB}$, que es equivalente a no cruzar la diagonal $\overline{CD}$.*

Nuestra variante

Lanzamos una moneda hasta que el número de caras sea igual al número de cruces. Si eso pasa después de lanzar la moneda k veces, nos pagan \$ k.

¿Cuánto estaría dispuesto a pagar un jugador racional?

Solución

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k)\mathbb{P}[X=2k] = \sum_{k=1}^{\infty}(2k)\frac{2}{4^k k}\binom{2k-2}{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^{k-1}}\binom{2k-2}{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$$

$$\geq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1} > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n} = \infty.$$

Cumpleaños en San Petersburgo

$m \backslash n$	10	15	20	25	30	50	100
10	0.9590	0.9917	0.9983	0.9997	0.9999	1.	1.
100	0.5675	0.7155	0.8129	0.8770	0.9191	0.9849	0.9998
1000	0.2257	0.3186	0.4004	0.4724	0.5357	0.7216	0.9225
10000	0.0770	0.1132	0.1481	0.1815	0.2136	0.3301	0.5512
100000	0.0249	0.0372	0.0493	0.0612	0.0730	0.1187	0.2232
1000000	0.0080	0.0119	0.0158	0.0198	0.0237	0.0391	0.0767

Table: Probabilidad (redondeada) de que en un grupo de n personas alguien tenga que lanzar su moneda al menos m veces para que le salgan el mismo número de caras que de cruces. Por ejemplo, para un salón con 30 estudiantes hay más de 50% probabilidad que alguien necesite lanzar al menos 1000 veces.

Muchas gracias

¿Preguntas?